

## Een raadsel van John Conway (26 december 1937 - 11 april 2020)

In de jaren zestig bedacht John Conway het volgende raadsel.

Gisteravond in de bus hoorde ik een gesprek tussen twee tovenaars:

A: „Ik heb een positief aantal kinderen; hun leeftijden zijn positieve gehele getallen. Als je hun leeftijden bij elkaar optelt, krijg je het nummer van deze bus. Als je hun leeftijden met elkaar vermenigvuldigt, krijg je mijn eigen leeftijd.“

B: „Wat interessant! Als je jouw leeftijd vertelt en mij zegt hoeveel kinderen je hebt, kan ik dan hun leeftijden achterhalen?“

A: „Nee!“

B: „Aha! Maar dan weet ik nu wél hoe oud jij bent!“

Wat is het nummer van de bus?

### Oplossing

Eerst een voorbeeld. Stel dat het busnummer 3 is. De mogelijkheden voor de leeftijden van de kinderen staan in de linkerkolom van de volgende tabel, met daarnaast de bijbehorende leeftijd van A en het aantal kinderen:

leeftijd van de kinderen	leeftijd van A	aantal kinderen
1, 1, 1	1	3
1, 2	2	2

Deze mogelijkheden zijn biologisch onmogelijk, maar wie Conways raadsel als een zuiver wiskundig probleem wil opvatten, kan deze mogelijkheden ook met een logische redenering uitsluiten. Immers, als A zijn leeftijd en het aantal kinderen zou vertellen (1 en 3 of 2 en 2), zou B (die het busnummer kent) de leeftijden van de kinderen probleemloos kunnen achterhalen. Hoort hij '1 en 3', dan weet hij dat alle kinderen 1 jaar zijn. Hoort hij '2 en 2', dan weet hij dat één kind 1 en één kind 2 jaar moet zijn. Uit het gesprek in de bus blijkt dat B de leeftijden echter níet kan achterhalen. Het busnummer kan dus niet 3 zijn.

We gaan verder met busnummer 4 (de busnummers 1 en 2 kunt u zelf nagaan) en maken weer een tabel met alle mogelijkheden:

leeftijd van de kinderen	leeftijd van A	aantal kinderen
1, 1, 1, 1	1	4
1, 1, 2	2	3
1, 3	3	2
2, 2	4	2
4	4	1

Ook deze mogelijkheden zijn biologisch onmogelijk, maar opnieuw is er ook een puur logische verklaring dat geen van deze mogelijkheden zich kan voordoen. Zegt A bijvoorbeeld dat hij 2 jaar is en 3 kinderen heeft, kan B concluderen dat de leeftijden van de kinderen 1, 1 en 2 zijn. Als antwoord op B's vraag zou dan 'ja' zijn. Ook de andere mogelijkheden in de tabel kunnen we zo uitsluiten.

Hier is de tabel als het busnummer 5 is:

leeftijd van de kinderen	leeftijd van A	aantal kinderen
1, 1, 1, 1, 1	1	5
1, 1, 1, 2	2	4
1, 1, 3	3	3
1, 2, 2	4	3
1, 4	4	2
5	5	1

Opnieuw geldt: als B de informatie in de tweede en derde kolom heeft, kan hij de leeftijden in de eerste kolom altijd achterhalen, want voor elke combinatie van de leeftijd van A en het aantal kinderen is er slechts één mogelijkheid voor de leeftijd van de kinderen.

Het patroon is nu duidelijk. We zoeken naar een busnummer met de eigenschap dat er méér dan één mogelijkheid is voor de leeftijd van de kinderen. Met andere woorden: een busnummer waarbij de bijbehorende tabel minstens twee regels bevat met dezelfde getallen in de tweede en derde kolom.

Neemt u zelf maar een rol behangpapier om de tabellen voor de busnummers tot en met 11 te maken. Hier volgt de tabel als het busnummer 12 is:

leeftijd van de kinderen	leeftijd van A	aantal kinderen
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1	12
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2	2	11
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2	4	10
1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2	8	9
1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2	16	8
1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2	32	7

2, 2, 2, 2, 2, 2	64	6
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3	3	10
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3	6	9
1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3	12	8
1, 1, 1, 2, 2, 2, 3	24	7
1, 2, 2, 2, 2, 3	48	6
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3	9	8
1, 1, 1, 1, 2, 3, 3	18	7
1, 1, 2, 2, 3, 3	36	6
2, 2, 2, 3, 3	72	5
1, 1, 1, 3, 3, 3	27	6
1, 2, 3, 3, 3	54	5
3, 3, 3, 3	81	4
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4	4	9
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4	8	8
1, 1, 1, 1, 2, 2, 4	16	7
1, 1, 2, 2, 2, 4	32	6
2, 2, 2, 2, 4	64	5
1, 1, 1, 1, 1, 3, 4	12	7
1, 1, 1, 2, 3, 4	24	6
1, 2, 2, 3, 4	48	5
1, 1, 3, 3, 4	36	5
2, 3, 3, 4	72	4
1, 1, 1, 1, 4, 4	16	6
1, 1, 2, 4, 4	32	5
2, 2, 4, 4	64	4
<b>1, 3, 4, 4</b>	<b>48</b>	<b>4</b>
4, 4, 4	64	3
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5	5	8
1, 1, 1, 1, 1, 2, 5	10	7
1, 1, 1, 2, 2, 5	20	6
1, 2, 2, 2, 5	40	5
1, 1, 1, 1, 3, 5	15	6
1, 1, 2, 3, 5	30	5
2, 2, 3, 5	60	4
1, 3, 3, 5	45	4
1, 1, 1, 4, 5	20	5
1, 2, 4, 5	40	4
3, 4, 5	60	3
1, 1, 5, 5	25	4
2, 5, 5	50	3
1, 1, 1, 1, 1, 1, 6	6	7
1, 1, 1, 1, 2, 6	12	6
1, 1, 2, 2, 6	24	5
<b>2, 2, 2, 6</b>	<b>48</b>	<b>4</b>
1, 1, 1, 3, 6	18	5
1, 2, 3, 6	36	4
3, 3, 6	54	3
1, 1, 4, 6	24	4
2, 4, 6	48	3
1, 5, 6	30	3
6, 6	12	2
1, 1, 1, 1, 1, 7	7	6
1, 1, 1, 2, 7	14	5
1, 2, 2, 7	28	4
1, 1, 3, 7	21	4
2, 3, 7	42	3
1, 4, 7	28	3
5, 7	35	2
1, 1, 1, 1, 8	8	5
1, 1, 2, 8	16	4
2, 2, 8	32	3
1, 3, 8	24	3
4, 8	32	2
1, 1, 1, 9	9	4
1, 2, 9	18	3
3, 9	27	2
1, 1, 10	10	3
2, 10	20	2
1, 11	11	2
12	12	1

Op uw rol behangpapier kunt u zelf nagaan dat er nooit twee rijen zijn waarbij de getallen in de tweede en de derde kolom gelijk zijn. Bij de tabel hierboven, die bij busnummer 12 hoort, is dat wél het geval: ze zijn rood weergegeven. Gezien A's antwoord 'nee' op B's vraag, kan B concluderen dat de leeftijden van de kinderen 2, 2, 2, 6 zijn of 1, 3, 4, 4. Andere rijen waarbij de kolommen twee en drie identiek zijn, zijn er niet. Daarom kan B concluderen dat A 48 jaar is. En wij weten dat het busnummer 12 is.

Toch hebben we het raadsel nog niet helemaal bevredigend opgelost. Hoe weten we zeker dat er niet ook een ander busnummer is, met een tabel met meerdere rijen identieke kolommen twee en drie?

De tabel voor busnummer 13 schrijven we niet helemaal uit, maar vier mogelijkheden geven we wel:

leeftijd van de kinderen	leeftijd van A	aantal kinderen
1, 6, 6	36	3
2, 2, 9	36	3
1, 1, 3, 4, 4	48	5
1, 2, 2, 2, 6	48	5

Het komt twee keer voor dat er twee rijen zijn met identieke kolommen twee en drie. Dus als het busnummer 13 is, is A's antwoord op B's vraag 'nee', net als bij busnummer 12. Toch kunnen we busnummer 13 uitsluiten, vanwege B's opmerking: „Aha! Maar dan weet ik nu wél hoe oud jij bent!” Had de bus immers nummer 13 gehad, had B A's leeftijd niet kunnen vaststellen.

Voor busnummers groter dan 13 hoeven we niet opnieuw een tabel te maken. Neem de tabel voor busnummer 13 en voeg overal één kind van 1 jaar toe. De leeftijd van A (tweede kolom) verandert dan niet. Het aantal kinderen (derde kolom) neemt overal met 1 toe. Om dezelfde reden als bij busnummer 13 kan A de vraag van B met 'nee' beantwoorden en kan B de leeftijd van A niet achterhalen. Op deze manier kun je alsmear verder gaan: steeds als het busnummer met 1 toeneemt, worden in de tabel éénjarige kinderen toegevoegd. A's leeftijd blijft steeds hetzelfde, het aantal kinderen neemt overal met 1 toe.

De opmerking „Aha!” kan B alleen maken bij busnummer 12. En daarmee is Conways geniale raadsel opgelost.

Alex van den Brandhof

## Literatuur

Alex Bellos: *Can You Solve My Problems? Ingenious, Perplexing, and Totally Satisfying Math and Logic Puzzles* (Guardian Faber Publishing, 2016)  
Tanya Khovanova: *Conway's Wizards* (2012) <https://arxiv.org/abs/1210.5460>